

## Hodnocení habilitační práce

*Tibor Macko*

### Classification problem in the topology of high dimensional manifolds

Předložená práce se skládá z šesti článků autora, Pro pořádek budiž řečeno, že u pěti z těchto článků má spoluautora (spoluautory). Je nutno ale také říci, že to nejsou zdaleka všechny autorovy práce. Těchto má celkem dvanáct, i když opět u desíti z nich má spoluautora (spoluautory), Zde bych rád konstatoval, že u dvou jeho článků jsou spoluautory mladí slovenští matematici, což považuji za velmi důležité a navíc je to skutečnost, která podporuje jmenování Tibora Macka docentem. Ukazuje, že i po stránce pedagogické je pro takovouto pozici vhodným kandidátem. Navíc jeho články jsou publikovány ve velmi dobrých časopisech (Algebraic & Geometric Topology, Topology and its Applications, Geometriae Dedicata, Journal of Topology). Práce ovšem neobsahuje pouze zmíněných šest článků. Je tu též rozsáhlý úvod mající 29 stran. Zařazení tohoto úvodu považuji za velmi vhodné, protože nepochybně usnadňuje studium výše zmíněných šesti prací. Zároveň tento úvod dává čtenáři možnost zorientovat se v dané problematice a ukazuje jaké techniky musel autor zvládnout, aby v dané oblasti vůbec mohl pracovat. Tento úvod sestává ze 14 částí a je k němu připojena dosti rozsáhlá literatura. Dalo by se říci, že se jedná o problematiku velmi současnou a používané techniky jsou velmi nové a také velmi různorodé. Takže jejich zvládnutí vyvolává respekt. Navíc je možno konstatovat, že angličtina práce je velmi dobrá.

Práce se zaměřuje na klasifikaci variet (ať už jsou topologické, diferencovatelné nebo ještě jiné) ve vyšších dimenzích (tzv. high dimensional manifolds). Tím jsou míněny variety dimenze větší nebo rovné pěti. Tato hranice vzniká vcelku přirozeným způsobem. Variety dimenzí 1 a 2 jsou dosti průhledné, variety dimenzí 3 a 4 jsou daleko méně průhledné a jejich zkoumání vyžaduje specifické postupy. Počínaje dimenzí 5 vychází, že používané metody fungují více méně bez ohledu na dimenzi. Bylo dokázáno, že klasifikace variet dimenze větší nebo rovné čtyřem není možná (úzce souvisí s “word problem for finitely presented groups”). Bylo tedy nutné věnovat se klasifikacím daleko hrubším a podléhajícím různým omezením. Za tímto účelem byl zaveden pojem *strukturální množina uzavřené n-dimenzionální variety* (tj. kompaktní variety bez kraje). Strukturální množina variety  $M$  sestává ze všech jednoduchých homotopických ekvivalencí z uzavřených  $n$ -rozměrných variet  $N$  do uvažované variety  $M$  “až na reparametrizaci variety  $N$ ”. (Podotkněme, že jednoduchá homotopická ekvivalence = simple homotopy equivalence a slovo simple není bráno v obecném slova smyslu, ale má zcela přesně definovaný matematický význam.) Podobně se definuje pojem *relativní strukturální množina kompaktní n-rozměrné variety s krajem*. Znalost strukturální množiny hraje zásadní roli v otázkách klasifikace. S její pomocí se daří postupovat od klasifikace až na homotopii ke klasifikaci až na blokový homeomorfismus (tento pojem tu v zájmu stručnosti nevysvětlujeme) a potom až na homeomorfismus uvnitř daného homotopického typu. Po technické stránce je v těchto úvahách důležitá teorie chirurgií, zejména tzv. chirurgická exaktní posloupnost.

Autor ve svých pěti článcích (z nichž jen tři jsou součástí disertace) se zabývá strukturálními množinami (zobecněných) čočkových prostorů. Čočkové prostory jsou klasickou záležitostí jejichž zobecněním jsou zobecněné čočkové prostory v práci anglicky nazývané fake lens spaces. Vznikají tak, že vezmeme volnou akci konečné cyklické grupy řádu  $N$  na sféře  $S$  liché

dimenze  $2d-1$ . Zobecněný čočkový proctor je faktorizací uvedené sféry podle akce uvažované cyklické grupy. Připomeňme, že o klasifikaci zobecněných čočkových prostorů bylo už něco známo. Pro  $N=2$  nebo  $N$  liché je tato klasifikace již popsána např. ve známé knize C.T.C.Wall-a Surgery on compact manifolds. V práci autora je popsána klasifikace pro  $N$ , které je libovolnou mocninou čísla 2. A v práci, která už je hotová a nabídnuta k publikaci (a není součástí habilitační práce) je klasifikační problém vyřešen pro cyklickou grupu libovolného konečného řádu  $N$ . Zde bych rád zdůraznil, že odvození těchto výsledků zabírá desítky stran a v žádném směru není jednoduché.

Ve čtvrtém článku zařazeném do habilitační práce se autor zabývá tzv.  $p$ -invariantem, který je důležitý při studiu výše zmíněné chirurgické exaktní posloupnosti. V případě uzavřené  $n$ -rozměrné topologické variety je její strukturální množina  $S$  abelovskou grupou a  $p$ -invariant je zobrazením  $S$  do subkvocientu representačního okruhu fundamentální grupy (a to neříkáme zcela přesně). Dokazuje se zde především, že  $p$ -invariant je homomorfismem abelovských grup. Zde bychom měli uvést, že podíl autora na zkoumání kolem  $p$ -invariantu je velký, což lze doložit na základě článku [B2], který ovšem není součástí habilitační práce.

V pátém článku je uvažována grupa homotopických ekvivalencí variety  $M$  a studuje se její akce na strukturální množině  $S$  variety  $M$ . Jsou získány informace o kardinalitě různých množin souvisejících se strukturální množinou  $S$ .

Poslední šestý článek spadá do oblasti algebraické  $K$ -teorie. Uvažují se tzv. nil-termý (nil-terms) topologického prostoru  $X$  a zkoumají se jejich homotopické vlastnosti. Jsou zde výsledky o homotopických grupách těchto nil-termů, pomocí dvou operací na nil-termech (Frobeniova operace a operace Verschiebung) je na nil-termech zavedena struktura modulu. Nakonec je studována struktura nil-termů po jejich  $p$ -zúplnění (pro liché prvočíslo  $p$ ).

Závěrem mohu konstatovat, že o práci mám vysoké mínění a podle mého názoru je to práce nadprůměrně kvalitní. Autor zvládnul velké množství obtížného materiálu, získal mnoho hlubokých výsledků a zároveň je schopen své výsledky prezentovat pěkným a srozumitelným způsobem. Myslím, že v oblasti klasifikace variet ho můžeme přiřadit k předním odborníkům. Jednoznačně proto doporučuji, aby Tibor Macko byl jmenován docentem.

3.1.2020

Jiří Vanžura  
Matematický ústav AV ČR, v.v.i.