

Posudek na habilitační práci Tibora Macka

Classification problems in the topology of high-dimensional manifolds

Habilitační práce je souborem šesti článků, jichž je Tibor Macko autorem nebo spoluautorem, a dvacetiosmistránkového úvodu, který podává přehled problematiky, zasazuje články do kontextu současného výzkumu, popisuje stručně jejich motivaci, hlavní výsledky, použité metody a vzájemné souvislosti. Práce je velice rozsáhlá, má více než 190 stran. Články tvořící habilitační práci byly publikovány v letech 2008 až 2019, z toho pět v impaktovaných časopisech: *Journal of Topology, Algebraic & Geometric Topology* (dva články), *Topology and its Applications* a *Geometriae Dedicata*. Článek [B4] byl jako přehledový publikován v *Bulletin of the Manifold Atlas*. Zejména první dva časopisy patří v oboru topologie a geometrie mezi špičkové.

Habilitační práce je věnována klasifikaci topologických a diferencovatelných variet dimenze větší nebo rovné 5. V nižších dimenzích má klasifikace svá specifika a používá jiné metody. V topologii vyšších dimenzí jsou hlavními nástroji kromě standardní klasické algebraické topologie teorie chirurgií, kobordismy a algebraická K-teorie.

Své články dělí autor do těchto čtyř skupin: výpočty v teorii chirurgií (A), strukturní problémy v teorii chirurgií (B), algebraická K-teorie (C) a prostory automorfismů a ortogonální kalkulus (D). Habilitační práce obsahuje 3 články z první skupiny, dva z druhé a jeden z třetí skupiny.

Základní význam má v habilitační práci pojem strukturní množiny variety M dimenze n . Jde o množinu jednoduchých homotopických ekvivalencí z variet dimenze n do variety M až na homeomorfismus nebo difeomorfismus podle toho, zda pracujeme v kategorii topologických nebo diferencovatelných variet. V topologické kategorii lze tuto množinu opatřit strukturou abelovské grupy, v kategorii diferencovatelných variet jde pouze o množinu s význačným prvkem. Jedním z klasifikačních problémů, kterými se předložená práce zabývá, je právě určení této strukturní množiny pro konkrétní variety. Hlavním prostředkem k tomu je chirurgická exaktní posloupnost (surgery exact sequence), kde kromě strukturní množiny vystupuje grupa normálních invariantů a grupy $L_*(\pi_1(M))$ definované pomocí automorfismů jistých kvadratických forem nad okruhem $\mathbb{Z}\pi_1(M)$, kde $\pi_1(M)$ je fundamentální grupa variety M . Určit strukturní množinu variety M znamená tedy prvně najít grupy normálních invariantů a L grupy, dále určit zobrazení vystupující v dlouhé exaktní posloupnosti a na závěr vyřešit problém rozšíření (extension problem). To bývá často technicky náročné a vyžaduje to použití vhodných invariantů.

Tento program byl realizován v článku [A1], kde autoři počítají strukturní množinu čočkového prostoru $L_{2^k}^{2d-1}$, což je prostor orbit akce grupy $\mathbb{Z}/2^k$ na sféře S^{2d-1} v \mathbb{C}^d . Pro grupy $G = \mathbb{Z}/N$, kde N se rovná dvěma nebo je liché byl výsledek znám již od 70-tých let 20. století. V případě, že N je mocnina dvou, je realizace výše naznačeného postupu pro výpočet strukturní množiny daleko obtížnější. Problém rozšíření je zde řešen pomocí tzv. ρ -invariantu, který vyžaduje použití G -invariantní verze Atiyahovy-Singerovy věty o indexu. V článku [A2], který není součástí habilitace, byl tento výsledek rozšířen na obecný případ, kdy je N libovolné přirozené číslo větší než jedna.

Článek [A3] je přehledným shrnutím výše uvedených výsledků. Kromě toho však obsahuje i věty týkající se realizace variet, které jsou sice homotopicky ekvivalentní s daným čočkovým prostorem, ale nejsou s ním homeomorfní.

Metody z článků [A1] a [A2] byly zobecněny v člancích [A4] a [A5] (součástí habilitace je pouze článek [A4]) na tzv. vyšší strukturní množiny čočkových prostorů, což jsou strukturní množiny variet s krajem $L_N^{2d-1} \times D^m$.

V případě čočkových prostorů je ρ -invariant homomorfismem ze strukturní grupy do jistého faktoru reprezentačního okruhu grupy $G = \mathbb{Z}/N$. V dalším článku [B1] dokazují autoři, že ρ -invariant je homomorfismem pro každou konečnou grupu G a varietu M s hlavním G -bandlem. K důkazu je potřeba použít bijekci mezi chirurgickou exaktní posloupností a tzv. algebraickou chirurgickou spektrální posloupností dokázanou v roce 1992 A. Ranickim. (V důkazu byly použity výsledky s neúplnými důkazy. Tyto nedostatky byly odstraněny v rozsáhlém článku [B2], jehož je Tibor Macko spoluautorem, ale který není součástí habilitace.) Tato bijekce dává strukturní množině strukturu abelovské grupy. Skutečnost, že ρ -invariant je homomorfismus je dokázána pomocí jeho faktorizace přes vyšší strukturní množiny.

Jestliže v definici strukturní množiny variety M zapomeneme na konkrétní homotopické ekvivalence do M zůstane nám množina (jednoduše) homotopicky ekvivalentních navzájem nehomeomorfních variet, která se nazývá (jednoduchá) množina variety M (simple manifold set). V práci [B4] autoři dokazují, že pro jednoduše souvislou varietu je množina variety nekonečná, právě když její strukturní množina je nekonečná. Současně ukazují příklady variet, které nejsou jednoduše souvislé a pro které předchozí tvrzení neplatí. Důležitou roli v důkazu hlavní věty hrají invarianty odvozené z Hirzebruchových \mathcal{L} -tříd.

Poslední článek habilitace se týká zobecnění algebraické K-teorie, tzv. algebraické K-teorie prostorů a zabývá se homotopickými grupami jistých speciálních prostorů, které se zde vyskytují.

Předchozí stručný přehled problematiky, kterou se Tibor Macko zabýval, ukazuje šíři jeho odborných zájmů a znalostí, které sahají od klasické homotopické teorie přes teorii chirurgií, větu o indexu, reprezentace grup až k algebraické K-teorii a jejím zobecněním. Výsledky prací sdružených do habilitační práce považují vesměs za velice kvalitní. V úvodu habilitační práce se autorovi podařilo své výsledky obsažené v následujících člancích zdařile vysvětlit a motivovat. Z habilitační práce a z citací autorových článků je vidět, že Tibor Macko je plátným a uznávaným členem komunity pracující v oblasti topologie variet vyšší dimenze.

Závěrem mohu konstatovat, že předložená práce splňuje všechny požadavky na habilitační práci a přesvědčivě ukazuje autorovu způsobilost ke špičkové vědecké práci v matematice. Proto vřele doporučuji jmenování Tibora Macka docentem.