



## Habilitační práce — Robert Lukočka

Toto je oponentský posudek na habilitační práci RNDr. Roberta Lukočky, Ph.D. předloženou Univerzitě Komenského v Bratislavě, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky v roce 2017 pod názvem *Rozdiely medzi snarkami*.

Práce je založena na šesti článcích předkladatele publikovaných v letech 2008–2016. Z toho jsou dva samostatné, ostatní vytvořené v různých autorských kolektivech. Články se zabývají různými pohledy na prostor cyklů v grafech. Tyto otázky jsou obvykle redukovatelné na případ grafů, ve kterých má každý vrchol stupeň 3. Zároveň se jedná o otázky, které jsou triviální pro grafy, jejichž hranová barevnost je 3. Proto se celá tato část teorie grafů (a jedná se o jednu z centrálních částí) dá chápat jako zkoumání snarků – 3-regulárních grafů, které nejdou hranově 3-obarvit, tzv. snarků. To vysvětluje i název předložené práce.

Následuje krátký popis předložených článků s označením jako v práci. Nutno podotknout, že předložená práce začíná čtivě a poučeně napsaným úvodem. Ten jednak zasazuje přínos předkladatele do kontextu, navíc může sloužit i jako stručný přehled zajímavých nedávných výsledků a otevřených problémů spjatých se snarky.

Články [A], [B] se zaměřují na cirkulární tokové číslo snarků. Vhodně se doplňují: v [A] se dokazuje dolní odhad na cirkulární tokové číslo snarku s daným počtem vrcholů. Jde zde o to, že snarky mají z definice tokové číslo větší než čtyři. Předkladatel ukazuje, že pro grafy s omezenou velikostí je toto číslo od čtyřky odražené. Získaný výsledek je takřka těsný, jak se ukazuje na příkladu Flower snarků.

Oproti tomu v [B] se zkoumá konkrétní nekonečná třída snarků (zobecněné Blanušovy snarky) a ukazuje se, že jejich cirkulární tokové číslo je rovno 4,5. Zatímco nalezení cirkulárního 4,5-toku je dosti snadné, důkaz, že lépe to nejde, vyžaduje netriviální analýzu dotčené konstrukce.

S článkem [C] se dostáváme k zásadním a překvapivým výsledkům. Ukazuje se zde, že pro každé racionální  $r \in [3, 3\frac{1}{3}]$  existuje snark s cirkulární hranovou barevností rovnou  $r$ . To vyvrátilo hypotézu Xudinga Zhu, který se domníval, že neexistuje nekonečná rostoucí, ale omezená posloupnost čísel, které jsou cirkulární barevností nějakého grafu. Důkaz využívá vtípné konstrukce pomocí tzv. monochromatických sítí a pečlivé analýzy jejich vlastností.

V článcích [D–F] je pozornost explicitně přesunuta na cykly ve snarcích. Všechny jsou založeny na technice, která byla vyvinuta předkladatelem, a která bude nepochybně důležitá i pro další rozvoj oblasti. Jedná se o způsob nalezení 2-faktoru v 3-regulárním grafu, ve kterém klademe omezení na výskyt krátkých kružnic v nalezeném 2-faktoru.

Článek [D] tuto techniku využívá na konstrukci grafů s velkou lichostí (oddness), resp. velkou rezistencí, při daném počtu vrcholů. Tím jsou zkoumány grafy, které – opět v jiném smyslu než v předchozích částech – jsou hodně vzdáleny od toho, aby byly 3-obarvitelné.

V [E] se technika kontroly krátkých cyklů dále rozvíjí. Je zde nalezen 2-faktor, který má lineárně mnoho vrcholů mimo 7-cykly v tomto 2-faktoru. Konečně v [F] se konstruuje pokrytí grafu pomocí systému cyklů s malou celkovou délkou.

V souhrnu je možno říci, že se jedná o ucelený soubor článků, které v mnoha rozličných směrech rozvíjejí stejné téma, zkoumání toho, jak daleko může být 3-regulární graf vzdálen od hranové 3-obarvitelnosti. Některé články (zejména [C]) přímo odpovídají na položené otevřené problémy, další ([F]) pokračují v postupném vylepšování výsledků předchozích autorů.

Články ukazují, že předkladatel ovládá rozličné důkazové postupy a vybírá z nich podle potřeby právě řešeného problému. Kromě základní kombinatorické metody (chytrá konstrukce a její efektivní rozbor) bych zmínil použití vlastností polytopu perfektních párování, či pravděpodobnostní techniku.

Z předloženého souboru prací je vidět schopnost autora vybrat nosné téma a tomu se dlouhodobě a soustavně věnovat. Tato vytrvalost přinesla ovoce, kterým je autorova upevňující se pozice experta v oblasti zkoumání tokových hypotéz, resp. vlastností snarků. V takovém případě může být posudek krátký. Zakončuji ho tedy konstatováním, že Robert Lukočka dosáhl mnoha pozoruhodných výsledků a předloženou práci prokázal své schopnosti k systematické práci na rozvoji teorie grafů. Z vyjmenovaných důvodů **navrhují přijmout práci jako podklad pro habilitaci a udělení titulu docent, jakož i jeho přijetí na docentskou pozici.**

V Praze dne 14. srpna 2017

doc. Mgr. Robert Šámal, Ph.D.  
Informatický ústav UK  
Univerzita Karlova