

Oponentní posudek habilitační práce

Jána Brajerčíka: Problémy globálnej variačnej geometrie: štruktúry, metódy, invariancia

Oponent: Prof. RNDr. Jana Musilová, CSc., Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Habilitační práce Jána Brajerčíka „Problémy globálnej variačnej geometrie: štruktúry, metódy, invariancia“ je souborem šesti původních prací autora (3 práce samostatné, 3 se spoluautory: D. Krupka, Z. Urban, M. Demko) z let 2005 až 2018, s komentářem. Tyto práce, tvořící kapitoly 3 až 8 habilitační práce, představují ucelený a obsahově konzistentní průřez vědeckou činností habilitanta a prezentují jeho vlastní originální přínos k problematice charakterizované názvem habilitační práce. Autor se také odkazuje na výběr svých dalších publikací (9 položek z let 2002 až 2017) vztahujících se k problematice prací uvedených v plném znění v habilitačním spisu. Práce tvořící habilitační spis byly publikovány v recenzovaných časopisech, z nichž dva (Journal of Mathematical Physics, International Journal of Geometrical Methods of Modern Physics) jsou renomovanými mezinárodními časopisy vysoké odborné úrovně, další pak (Archivum Mathematicum, Czechoslovak Mathematical Journal, Mathematica Slovaca, Balkan Journal of Geometry and Applications) jsou tradičními matematickými (rovněž vysoce ceněnými) časopisy mezinárodního významu, vydávanými v ČR, v SR, a v Rumunsku.

Komentář k prezentovaným publikacím uvádí autor v kapitolách 1 a 2 habilitační práce. V první kapitole „Variačná teória na fibrovaných priestoroch“ podává velmi stručný přehled základních pojmů a výsledků zmíněné teorie (fibrované prostory, vektorová pole a diferenciální formy spjaté s fibrovanou strukturou podkladových prostorů, lagrangianů, variační integrál a jeho stacionární body, Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, symetrie a teorém Noetherové). Terminologie, symbolika a způsob výkladu se opírají o vysoce efektivní styl zavedený do studia příslušné problematiky D. Krupkou. Stručnost (5 stran) není nikterak na závadu, neboť základy variační teorie na fibrovaných prostorech jsou dobře rozpracovány a její výsledky takřka notoricky známy. Druhá kapitola „Prehl'ad výsledkov súboru prác“, v níž autor postupně poměrně podrobně (vždy na jedné až dvou stranách) komentuje práce tvořící habilitační spis, včetně výstižné charakteristiky původních výsledků, je velmi dobře napsaná a velice usnadňuje studium prací samotných zájemců o problematiku.

Všechny prezentované práce se zabývají variačním problémem na fibrovaných prostorech s lagrangianem λ , popřípadě v situaci, kdy podkladovým prostorem je hlavní fibrovaný bandl se strukturní grupou G a lagrangian je G -invariantní.

Kapitola 3 představuje práci „Variational principles for locally variational forms“ (spolu s D. Krupkou, J. Math. Phys. **46**, 052903 (2005)) a spadá do období poměrně intenzivního studia inverzního variačního problému, mj. prostřednictvím variační posloupnosti na konečných prodloužených fibrovaných prostorech, definované D. Krupkou v roce 1989 a studované později jeho spolupracovníky a dalšími autory. Práce ukazuje souvislost variačnosti s Lepageovými formami, prezentuje původní výsledky týkající se infinitezimálních symetrií, založené na fundamentální Lepageově formě, ukazuje zcela v obecnosti, že ke globální variační dynamické formě obecného řádu existují obecně pouze lokální lagrangiany.

Kapitola 4 uvádí práci „*Invariant variational problems on principal bundles and conservation laws*“ (Arch. Math. **47** (2011), 357-366). Studuje se v ní variační problém definovaný lagrangiány r -tého řádu na hlavním bandlu P (tj. na jeho r -tém prodloužení), které jsou invariantní vzhledem ke strukturní grupě G bandlu P a souvislost Eulerových-Lagrangeových rovnic se zákony zachování.

Kapitola 5 „*Second order differential invariants of linear frames*“ (Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol. **15** (2010), 2, 22-33) charakterizuje diferenciální invarianty bandlu lineárních reperů FX nad n -rozměrnou varietou X , a to invarianty skalární a invarianty s hodnotami v tenzorových prostorech druhého řádu.

Kapitola 6 „*Order reduction of the Euler-Lagrange equations of higher order invariant variational problems on frame bundles*“ (Czechoslovak Math. J. **61** (136) (2011), 1063-1076) se zabývá problematikou redukce řádu Eulerovy-Lagrangeovy formy (která je pro případ lagrangiánu řádu r obecně řádu $2r$) v situaci, kdy je podkladovým prostorem hlavní fibrováný bandl reperů $\mu: FX \rightarrow X$ na varietě X . Na základě korespondence řezů prodloužení J^1FX prostoru FX a řezů bandlu C^1X lineárních konexí na X ukazuje, že ke $GL_n(\mathbf{R})$ -invariantnímu variačnímu problému na $J^{r+1}FX$ lze přistupovat jako k redukovanému problému na J^rC^1X , což vede k redukci variačních rovnic pro extrémály.

Kapitola 7 obsahuje práci „*Principal bundle structure on jet prolongations of frame bundles*“ (spolu s M. Demkem a D. Krupkou, Mathematica Slovaca **64** (2014), 1277-1290). Cílem prezentované publikace je studium existence struktur hlavního bandlu na holonomním bandlu reperů řádu r , tj. J^rFX . Hlavní výsledek autorů spočívá v nalezení Lieovy grupy, která na J^rFX zadává strukturu hlavního bandlu. Tato konstrukce vede k redukci hlavního prodloužení W^rFX na J^rFX . Dále jsou studovány akce této nově zavedené Lieovy grupy na příslušné asociované bandly.

Kapitola 8 představuje zcela aktuální publikaci „*The fundamental Lepage form in variational theory for submanifolds*“ (s Z. Urbanem, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. Vol **15** (2018), 6, 1850103, 30 pp.). V ní jsou studovány variační funkcionály tvaru vícenásobných integrálů pomocí fundamentálního Lepageova ekvivalentu homogenního lagrangiánu, který je zobecněním Hilbertovy formy známé z mechaniky. (Jedná se o variační problém prvního řádu.) Pojem Lepageova ekvivalentu je rozšířen na variety regulárních rychlostí a má význam pro variační teorii na podvarietách. V práci je dosaženo několika originálních výsledků: 1) je popsána struktura Lepageova ekvivalentu pro pozitivně homogenní lagrangiány a odvozeno souřadnicové vyjádření, 2) pojem Lepageovy formy (běžný pro případ fibrováných variet) je rozšířen na variety regulárních rychlostí – jde o objekt podstatného významu pro variační teorii, 3) je ukázáno, že fundamentální Lepageův ekvivalent splývá s Hilbertovým-Carathéodoryho ekvivalentem pro tzv. minimální podvariety.

Závěrečná kapitola 9 „*Ďalší výzkum*“ stručně shrnuje habilitantovu představu o pokračování jeho výzkumu v dané oblasti – budování ucelené teorie řízení a optimalizace na základě inverzního variačního problému pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, dále pak pokračování ve studiu invariantních variačních problémů.

Habilitační práce poskytuje, při poměrně úsporném rozsahu, velmi přehledný obraz o široké problematice moderní matematiky v kontextu s vlastními výsledky autora, které jsou hodnotným příspěvkem k studované problematice. Články zahrnuté do habilitační práce a původní výsledky v nich obsažené ukazují jednoznačně na schopnost habilitanta dobře se

orientovat v poměrně náročné, i když geometricky docela názorné problematice a tvůrčí schopnost dosahovat v ní vlastních původních výsledků. (Nutno podotknout, že podíl habilitanta na třech ze šesti prací, jež byly vytvořeny se spoluautory, je poloviční v případě jednoho spoluautora, třetinový v případě dvou spoluautorů.) Za podstatnou považuji skutečnost, že přestože jde o práce prezentované v oboru Matematika, mají nespornou aplikační hodnotu v matematické fyzice, jak v oblasti mechaniky, tak teorie polí. Zastřešující komentář je velmi dobře napsaný – dává již sám o sobě dobrý přehled o obsahu publikovaných výsledků, bez nutnosti hlubšího studia prací samotných. To dle mého mínění svědčí o výborné erudici habilitanta jako pedagoga.

Závěr: Práce Jána Brajerčfka „Problémy globálnej variačnej geometrie: štruktúry, metódy, invariancia“ vyhovuje požadavkům standardně kladeným na habilitační práce v oboru Matematika. Splňuje tedy odpovídající část kritérií (vztahujících se k habilitační práci jako jedné z náležitostí přihlášky k habilitačnímu řízení), na základě nichž má být uchazeč jmenován docentem. Jako takovou ji proto doporučuji k dalším částem habilitačního řízení a vyslovuji doporučující stanovisko ke jmenování uchazeče docentem z hlediska posouzení habilitační práce.

V Brně dne 14. 11. 2019

Jana Musilová